

# Resolução de Sistema de Equações Lineares associado à propagação sonora no exterior e exemplos de aplicações práticas

Vitor Carlos Tadeia Rosão

Absorsor Engenharia Lda, <http://www.absorsor.pt>, Divisão de Acústica Ambiental, Rua dos Malmequeres, Bloco L, Loja 2, Urbanização Monte Branco, 8005-214 Faro, [vitor.rosao@absorsor.pt](mailto:vitor.rosao@absorsor.pt)

**RESUMO:** Como é patente nos softwares de modelação acústica no exterior, actualmente disponíveis, a aproximação da Acústica Geométrica é largamente utilizada como ferramenta de cálculo, servindo, inclusivamente, de suporte ao método veiculado pela norma internacional ISO 9613-2. Uma das vantagens da aproximação da Acústica Geométrica é a possibilidade de estabelecimento dum sistema de equações linearizáveis, de resolução facilitada, relacionando as diferentes fontes sonoras em presença, os diferentes obstáculos e os diferentes receptores. Tal sistema pode ser utilizado como ferramenta de recurso em diferentes casos práticos, como seja a necessidade de conhecimento, mediante medições *in situ*, dos níveis de intensidade sonora em pontos de difícil ou indesejado acesso, ou como seja a necessidade de caracterização *in situ* de uma fonte sonora específica que se encontra rodeada de outras fontes sonoras de difícil ou impossível controlo. Nesta comunicação são apresentados exemplos de aplicações práticas do referido sistema, como seja a caracterização da eficácia de um pavimento poroso implementado numa Auto-Estrada, através de medições de ruído antes e depois da implementação, a obtenção das características de emissão sonora de diferentes vias concomitantes, ou a obtenção dos níveis sonoros num ponto genérico em função do resultado de medições *in situ* em outros pontos.

**ABSTRACT:** As it is shown in the exterior acoustic modulation software currently available, the geometric acoustic formulation is largely used as a calculation tool, being in fact ISO 9613-2 support method. One of the advantages of geometric acoustic formulation is the possibility of establishing a system of linear equations, with easy resolution, relating the different sound sources, obstacles and receptors. Such a system can be utilised as tool in different practical cases, namely when it is required the knowledge of the sound intensity in points of difficult or undesirable access, or when it is required to characterise a specific sound source that is surrounded by others sound sources of difficult or impossible control. In this present paper, examples of practical applications of this system are shown, such as the characterisation of the efficiency of a porous pavement in a highway, through noise measurements before and after the implementation of the pavement., the calculation of sound emission characteristics of different closed roads, or the calculation of sound levels in a generic point as a function of *in situ* measurement in other points.

## 1. INTRODUÇÃO

Segundo o Princípio de Huyghens [1], pode-se simular qualquer Fonte Sonora por um conjunto, de Fontes Sonoras Pontuais, cada qual com características específicas de emissão.



Considerando como válida a aproximação da Acústica Geométrica [2], podem-se definir Raios Acústicos entre as diferentes Fontes Sonoras Pontuais e diferentes Pontos Receptores, sendo a Atenuação Sonora,  $A$ , para cada um desses “caminhos sonoros”, directos ou reflectidos, dada por [3]:

$$A = A_{div} + A_{atm} + A_{gr} + A_{bar} + A_{misc} \quad (1)$$

Para um determinado Ponto Receptor Genérico  $G$  – considerando a existência de  $s$  Fontes Sonoras Pontuais Mutuamente Incoerentes [1] –, o Nível de Intensidade Sonora  $L_{IG}$  vem dado por:

$$L_{IG} = 10 \log \left( \sum_{n=1}^s 10^{\frac{L_{IGn}}{10}} \right) \quad (2)$$

Onde  $L_{IGn}$  corresponde ao Nível de Intensidade Sonora devido a cada uma das  $s$  Fontes Sonoras Pontuais, e vem dado por:

$$L_{IGn} = L_{Wn} - A_{WnG} \quad (3)$$

Onde  $L_{Wn}$  corresponde ao Nível de Potência Sonora para cada uma das  $s$  Fontes Sonoras Pontuais e  $A_{WnG}$  à Atenuação Sonora, explicitada na equação (1), entre cada uma das Fontes Sonoras Pontuais e o Ponto Receptor Genérico  $G$ .

Fazendo medições em  $m$  Pontos de Medição  $M$ , tem-se que o Nível de Intensidade Sonora em cada um desses pontos vem dado por:

$$L_{IM1} = 10 \log \left( 10^{\frac{L_{W1} - A_{W1M1}}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_{Ws} - A_{WsM1}}{10}} \right) \\ \vdots \\ L_{IMm} = 10 \log \left( 10^{\frac{L_{W1} - A_{W1Mm}}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_{Ws} - A_{WsMm}}{10}} \right) \quad (4)$$

## 2. MONITORIZAÇÃO RELACIONAL

No caso de se pretender saber o Nível de Intensidade Sonora num Ponto Receptor Genérico  $G$ , em função do Nível de Intensidade Sonora medido em  $m$  Pontos de Medição – o que se denomina por Monitorização Relacional [4] –, pode escrever-se o seguinte sistema de equações não lineares:



$$\left\{ \begin{array}{l} L_{IG} = 10 \log \left( 10^{\frac{L_{W1} - A_{W1G}}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_{Ws} - A_{WsG}}{10}} \right) \\ L_{IM1} = 10 \log \left( 10^{\frac{L_{W1} - A_{W1M1}}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_{Ws} - A_{WsM1}}{10}} \right) \\ \vdots \\ L_{IMm} = 10 \log \left( 10^{\frac{L_{W1} - A_{W1Mm}}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_{Ws} - A_{WsMm}}{10}} \right) \end{array} \right. \quad (5)$$

Efectuando as seguintes substituições:

$$l_{IG} = 10^{\frac{L_{IG}}{10}} ; l_{IMi} = 10^{\frac{L_{IMi}}{10}} ; l_{Wi} = 10^{\frac{L_{Wi}}{10}} ; a_{ij} = 10^{-\frac{A_{WjMi}}{10}} ; a_{Gi} = 10^{-\frac{A_{WiG}}{10}} \quad (6)$$

Obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{IG} = a_{1G}l_{W1} + \dots + a_{sG}l_{Ws} \\ l_{IM1} = a_{11}l_{W1} + \dots + a_{s1}l_{Ws} \\ \vdots \\ l_{IMm} = a_{1m}l_{W1} + \dots + a_{sm}l_{Ws} \end{array} \right. \quad (7)$$

Considerando que os Níveis Sonoros nos Pontos de Medição são obtidos *in situ*, e que as Atenuações podem ser calculadas teoricamente, tem-se  $m+1$  equações e  $s+1$  incógnitas. Se existirem  $d$  Fontes Pontuais relacionáveis, podemos escrever  $d-1$  equações (preferencialmente lineares ou linearizáveis) relacionando-as, o que faz com que tenhamos  $m+d$  equações.

Para que este sistema de equações lineares não homogéneas seja resolúvel, é necessário que o número de incógnitas seja igual ao número de equações, logo:

$$m + d = s + 1 \Leftrightarrow m = s - (d - 1) \quad (8)$$

Ou seja, pode estabelecer-se o seguinte Princípio Geral da Monitorização Relacional:

**O número de Pontos de Medição tem de ser igual ao número de Fontes Sonoras Pontuais menos o número de relações independentes entre elas.**

## 2.1 Fontes sonoras independentes

Considerando que é cumprido o Princípio Geral da Monitorização Relacional, e que todas as Fontes Sonoras Pontuais são independentes, pode resolver-se algebricamente o sistema



explicitado na expressão (7), mediante a Regra de Cramer [5] e o Teorema de Laplace [6], donde resulta [7]:

$$L_{IR} = 10 \log \left( \frac{A_1 10^{\frac{L_{IM1}}{10}} + \dots + A_m 10^{\frac{L_{IMm}}{10}}}{A_G} \right) \quad (9)$$

Onde  $A_i$  e  $A_G$  são os denominados Determinantes das Matrizes de Atenuação [7]:

## 2.2 Fontes sonoras dependentes

Caso se possa estabelecer o  $d-1$  relações lineares, entre  $d$  fontes dependentes ( $2 \leq d \leq s$ ), do tipo:

$$L_{Wi} = K_i + L_{Wd} \quad (10)$$

Com ( $1 \leq i \leq d-1$ ). Pode demonstrar-se [7] – fazendo a substituição  $k_i = 10^{\frac{K_i}{10}}$  –, que:

$$L_{IG} = 10 \log \left( \frac{R_1 10^{\frac{L_{IM1}}{10}} + \dots + R_m 10^{\frac{L_{IMm}}{10}}}{R_G} \right) \quad (11)$$

Ou seja, uma expressão idêntica à (9), onde  $R_i$  e  $R_G$  são os denominados Determinantes das Matrizes de Atenuação/Relação [7].

## 2.3 Obtenção indirecta dos Determinantes das Matrizes Atenuação/Relação

A aconselhável utilização dos *softwares* actuais de previsão dos níveis sonoros no exterior, para monitorização, por exemplo, dos Níveis Sonoros associados a infra-estruturas rodoviárias muito extensas, com muitos Pontos Receptores e com volumes de Tráfego Médio Diário Anual superiores a 16500 veículos [8] – mediante o controlo *in situ* dos dados de tráfego –, tem a desvantagem dos Níveis Sonoros previstos poderem não contemplar eventuais variações de fluxo, do comportamento dos condutores ou até das características do pavimento.

Nestas circunstâncias, afigura-se mais fiável a implementação da Monitorização Relacional, a qual é sensível ao tipo de variações referidas.

Os *softwares* actuais e os previstos [9], tanto quanto o autor sabe, não possuem forma directa de implementação da Monitorização Relacional. Assim, considerando que, para um dado Ponto Receptor Genérico e para um dado conjunto de Pontos de Medição, os Determinantes das Matrizes de Atenuação/Relação são constantes (para determinadas condições atmosféricas), tem-se que uma forma indirecta de obter esses determinantes é calcular os Níveis Sonoros nos Pontos de Medição e nos Pontos Receptores pretendidos, mediante os *softwares* actuais (para  $m$  diferentes dados de emissão sonora e para determinadas condições atmosféricas), e atender às seguintes relações:



$$\left\{ \begin{array}{l} L_{IG1} = 10 \log \left( \frac{R_1}{R_G} 10^{\frac{L_{IM11}}{10}} + \dots + \frac{R_m}{R_G} 10^{\frac{L_{IMm1}}{10}} \right) \\ \vdots \\ L_{IGm} = 10 \log \left( \frac{R_1}{R_G} 10^{\frac{L_{IM1(m+1)}}{10}} + \dots + \frac{R_m}{R_G} 10^{\frac{L_{IMm(m+1)}}{10}} \right) \end{array} \right. \quad (12)$$

Recorrendo à Regra de Cramer [5], pode demonstra-se, mediante substituições semelhantes às (6), que:

$$\frac{R_i}{R_G} = \frac{\begin{vmatrix} 10^{\frac{L_{IM11}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IM(i-1)1}}{10}} & L_{IG1} & 10^{\frac{L_{IM(i+1)1}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IMm1}}{10}} \\ 10^{\frac{L_{IM12}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IM(i-1)2}}{10}} & L_{IG2} & 10^{\frac{L_{IM(i+1)2}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IMm2}}{10}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 10^{\frac{L_{IM1m}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IM(i-1)m}}{10}} & L_{IGm} & 10^{\frac{L_{IM(i+1)m}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IMmm}}{10}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10^{\frac{L_{IM11}}{10}} & 10^{\frac{L_{IM21}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IMm1}}{10}} \\ 10^{\frac{L_{IM12}}{10}} & 10^{\frac{L_{IM22}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IMm2}}{10}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 10^{\frac{L_{IM1m}}{10}} & 10^{\frac{L_{IM2m}}{10}} & \dots & 10^{\frac{L_{IMmm}}{10}} \end{vmatrix}} \quad (13)$$

## 2.4 Monitorização Relacional na Ponte Vasco da Gama

No caso dos acessos norte à Ponte Vasco da Gama, optou-se (pelas razões já expostas) pela realização duma Monitorização Relacional, tendo sido verificada qual a Fonte Sonora (via de trânsito) que prevalece para um determinado conjunto de Receptores. Foram, assim, escolhidos Pontos de Medição junto às vias de trânsito com influência dominante, por forma a que para cada conjunto de pontos Receptores apenas existisse um Ponto de Medição associado, ou seja:

$$L_{IG} = 10 \log \left( \frac{R_1}{R_G} 10^{\frac{L_{IM1}}{10}} \right) \Leftrightarrow L_{IG1} = \text{constante} + L_{IM1} \quad (14)$$

Assim foram determinadas as diferentes constantes para cada conjuntos de Pontos Receptores, o que permite saber, de forma expedita, em função dos valores medidos nos Pontos de Medição, quais os níveis sonoros associados em todos os Pontos Receptores [10].

### 3. DETERMINAÇÃO DA POTÊNCIA SONORA

Caso se pretenda saber o Nível de Potência Sonora de  $s$  Fontes Sonoras Pontuais, devem também efectuar-se medições *in situ* em um número de Pontos de Medição igual ao número de Fontes Sonoras Pontuais menos o número de relações independentes entre elas.

Verificando que o sistema de equações (4) é semelhante ao sistema de equações (12), tem-se que o Nível de Potência Sonora  $L_{wi}$  é dado por  $10 \log(\Lambda_i)$ , onde  $\Lambda_i$  corresponde à divisão dos

dois determinantes explicitados na expressão (13), correspondendo, nessa expressão,  $10^{-10} \frac{L_{IMm}}{A_{WsMm}}$  a  $10^{-10} \frac{A_{WsMm}}{L_{IGm}}$  e  $10^{-10} \frac{L_{IMm}}{A_{WsMm}}$ .

Uma forma indirecta de determinar as  $2m$  Atenuações  $10^{-10} \frac{A_{WsMm}}{L_{IGm}}$ , é efectuar a modelação da situação nos *softwares* actuais, e prever os Níveis Sonoros nos Pontos de Medição para  $2m$  situações diferenciadas de emissão sonora conhecida das Fontes Pontuais, para que fiquemos com  $m$  equações associadas às medições e  $2m$  equações associadas ao modelo, as quais possuem  $m$  incógnitas associadas aos Níveis de Potência Sonora das  $m=s$  Fontes Pontuais e  $2m$  incógnitas associadas às  $2m$  Atenuações, ou seja, o sistema é resolúvel.

#### 3.1 Vias de tráfego concomitantes

Na elaboração de determinado Mapa de Ruído concelhio, pretendeu-se caracterizar a potência sonora de duas vias concomitantes, para introdução desses valores no modelo, por se considerar que o tipo de pavimento e o tipo de tráfego não se ajustava a uma modelação por introdução simples dessas variáveis no modelo. Considerou-se, assim, que cada via era constituída por  $S$  Fontes Sonoras Pontuais, possuindo as Fontes Pontuais associadas à mesma via o mesmo Nível de Potência Sonora. Nestas circunstâncias, foram realizadas medições em 2 Pontos de Medição.

Para determinação indirecta das Atenuações, os Pontos de Medição foram localizados no modelo de previsão desenvolvido, e foram previstos os Níveis Sonoros nesses pontos para 4 situações distintas de emissão sonora conhecida (valores explicitados pelo modelo). Por recurso à expressão (13), quando adaptada ao sistema de equações (4), obtiveram-se os valores de Potência Sonora ajustados à realidade e em condições de introdução no modelo.

#### 3.1 Eficácia de um pavimento

Pretendeu a BRISA, em determinado troço de Auto-Estrada, saber quais as atenuações produzidas por um determinado pavimento – supostamente menos ruidoso –, no que concerne às emissões sonoras dos veículos ligeiros e às emissões sonoras dos veículos pesados, acrescentando o facto do pavimento ir ser implementado apenas num sentido da Auto-Estrada.

Considerando que cada sentido da Auto-Estrada tem  $V_L$  Fontes Sonoras Pontuais associadas à Emissão Sonora dos Veículos Ligeiros e  $P$  Fontes Sonoras Pontuais associadas aos Veículos Pesados, e que as Fontes Pontuais associadas ao mesmo tipo de veículo e ao mesmo sentido da Auto-Estrada têm igual Nível de Potência Sonora, tem-se que são necessários 4 Pontos de

Medição antes e quatro Pontos de Medição depois do pavimento, para que o sistema de equações (4) seja resolúvel.

Como se pretende a eficácia e não o valor da Potência Sonora, pode-se evitar o cálculo das

Atenuações, mediante a assunção do binómio  $10^{\frac{L_w - A_{wimj}}{10}}$  como uma única variável  $10^{\frac{LA_{wimj}}{10}}$ .

Através da realização de 4 medições antes e 4 medições depois do pavimento, no mesmo Ponto de Medição, para 4 situações distintas de tráfego, e assumindo que os Níveis de Potência Sonora variam numa proporção de  $10\log(N)$ , sendo  $N$  o volume de tráfego, tem-se que conhecendo os volumes de tráfego em presença (contagens *in situ*) se pode escrever o seguinte sistema de equações, cuja resolução é idêntica ao do sistema de equações (12):

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{IM1} = 10\log \left( N_{11} 10^{\frac{LA_{W1M}}{10}} + N_{21} 10^{\frac{LA_{W2M}}{10}} + N_{31} 10^{\frac{LA_{W3M}}{10}} + N_{41} 10^{\frac{LA_{W4M}}{10}} \right) \\ L_{IM2} = 10\log \left( N_{12} 10^{\frac{LA_{W1M}}{10}} + N_{22} 10^{\frac{LA_{W2M}}{10}} + N_{32} 10^{\frac{LA_{W3M}}{10}} + N_{42} 10^{\frac{LA_{W4M}}{10}} \right) \\ L_{IM3} = 10\log \left( N_{13} 10^{\frac{LA_{W1M}}{10}} + N_{23} 10^{\frac{LA_{W2M}}{10}} + N_{33} 10^{\frac{LA_{W3M}}{10}} + N_{43} 10^{\frac{LA_{W4M}}{10}} \right) \\ L_{IM4} = 10\log \left( N_{14} 10^{\frac{LA_{W1M}}{10}} + N_{24} 10^{\frac{LA_{W2M}}{10}} + N_{34} 10^{\frac{LA_{W3M}}{10}} + N_{44} 10^{\frac{LA_{W4M}}{10}} \right) \end{array} \right. \quad (15)$$

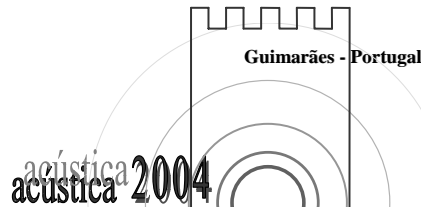
Onde  $N_{ij}$  é o número de veículos associado à fonte  $W_i$  na medição  $j$ .

## 4. CONCLUSÃO

As metodologias de resolução do sistema de equações lineares associado à propagação sonora no exterior, são muito úteis no auxílio à resolução de inúmeros casos práticos com vantagens indiscutíveis, pelo que se afigura merecerem uma contemplação em futuras versões dos *softwares* de modelação acústica no exterior ou em futuros *softwares*, como seja o modelo de em desenvolvimento pelo Consórcio Harmonoise [9]. De notar que o Princípio Geral da Monitorização Relacional estabelece o número mínimo de Pontos de Medição, para que o sistema de equações seja resolúvel, pelo que a existência dum maior número de pontos pode ser aconselhável, para cálculo das incertezas associadas à metodologia, o que, de forma indirecta, pode permitir o cálculo das incertezas dos *softwares* de modelação para situações específicas.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Eng.<sup>a</sup> Odete Domingues, que me ajudou e incentivou nos primeiros tempos do desenvolvimento do método (já lá vão 6 anos). Agradeço também ao Prof. Doutor Pedro



Martins da Silva, a quem devo, em grande parte, os conhecimentos acústicos que hoje possuo. Agradeço ainda a ajuda e opinião de alguns amigos (Adelino Paiva, Alexandra Reis, António Saraiva, Cármen Souto, Carlos Rosão, Graça Candeias, Luís Alcobia e Paulo Valério), o amor e paciência da minha esposa (Zélia Ramos) e a disponibilidade, correcção e conselhos práticos – relativamente à presente comunicação e não só – do Eng. Luís Conde Santos. Bem hajam.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. D. Pierce; *Acoustics, An Introduction To It's Physical Principles and Applications*. 3ª Ed.: Acoustical Society of America, New York, 1994. ISBN 0-88318-612-8.
- [2] A. P. Dowling, J. E. F. Williams – *Sound and Sources of Sound*. Ellis Horwood Limited, New York, 1983. ISBN 0-85312-527-9.
- [3] NP 4361-2: 2001 (ISO 9613-2:1996); *Acústica: Atenuação do Som na Sua Propagação ao Ar Livre: Método Geral de Cálculo*.
- [4] V. C. T. Rosão; *Programas de Monitorização na Componente Acústica*. Seminário sobre Estudos de Impacte na Componente Acústica, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 2001.
- [5] E. Kreyszig; *Advanced Engineering Mathematics*. 8ª Ed.: John Wiley & Sons, New York, 1999. ISBN 0471-33328-X.
- [6] E. J. C. Martinho, J. C. Oliveira, M. A. Fortes; *Matemática para o Estudo da Física*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1985.
- [7] V. C. T. Rosão; *Monitorização Posicional na Componente Acústica do Ambiente*. Trabalho da disciplina Acústica de Edifícios do Mestrado em Engenharia Física, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.
- [8] Instituto do Ambiente; *Directrizes para a Elaboração de Planos de Monitorização de Ruído de Infra-Estruturas Rodoviárias e Ferroviárias*. 2003. (<http://www.iambiente.pt>)
- [9] <http://www.harmonoise.org>
- [10] <http://www.acusticaeambiente.pt>